量子確率微分方程式の系統的体系

有光敏彦
筑波大物理

斎藤　健
筑波大物理

概要

Non-Equilibrium Thermo Field Dynamics（ＮＥＴＦＤ）の枠組みで著者の一人 (T. A.) により定式化された量子系確率リウヴィユ方程式を拡張することにより、量子系に対して、白色雑音をもった確率微分方程式の系統的な体系を構成できることを示す。熱空間で構成されたこの量子系確率微分方程式の体系では、量子系ランジュヴァン方程式に伴う困難が現れない。

1.　序論

１９０５年にアインシュタイン [1] が熱揺らぎの確率解釈を提唱し熱統計力学の基礎を築いて以来、確率過程による自然（巨視的現象）の記述は、散逸系の動的振舞いを理解する基本的方法の一つとなっている。ランジュヴァン [2] はブラウン粒子を取り扱う際に、揺動力を考慮してランジュヴァン方程式と呼ばれる確率方程式を導入した。これは、確率変数に対する方程式であり解析関数に対する通常の微分の定義が適用できない。確率微分方程式の数学的基礎付けは伊藤 [3] とストラトノヴィッチ [4] によりなされた。久保は、確率リウヴィユ方程式 [5] という確率過程における新しい方法を導入した。ランジュヴァン方程式が力学変数に対する確率方程式であるのに対して、確率リウヴィユ方程式は位相空間での確率方程式である。

量子系に対するランジュヴァン方程式の定式化はセニツキー [6] により始められ、* その後、ラックス [8]、ハーケン [9]、ストリーター [10]、長谷川等 [11] により研究された。これらの体系では、考えている系（注目する系）の互いに共役な確率演算子に対して同時刻正準交換関係を課すと、揺動力演算子のスペクトル密度関数に

*量子系に対するランジュヴァン方程式の独特な導出法が森により示された [7] ことを付記しておく。

対して特別の形を導入しなければならない。そのため、量子系の確率過程が白色になり得ないのであった。一方、減衰理論 [12]-[15] で長時間極限（または、それと等価なファン・ホーヴ極限 [16]）をとることにより量子系に対するフォッカー・プランク方程式を導くことができるが、この事実は量子系に対しても白色確率過程が存在することを示しているといえる。この点が、量子白色過程の存在を許す量子確率方程式の系統的な体系を作ろうとした動機の一つである。

また、久保により指摘されたように [17]、量子系のランジュヴァン方程式の理論には上に述べた食い違いの他に、いくつかの問題点があった。第一の問題点は、ランジュヴァン方程式の表現空間の問題である。その表現空間は注目する系と揺動力（注目しない系）の表現空間から成るヒルベルト空間であるが、通常は、揺動力演算子に対する運動方程式は考えない。後に、この論文で定式化される体系の枠組みで、この点に関して議論する。第二の問題点は、 白色過程の揺動力演算子がＫＭＳ条件 [18, 19] を満たさないことである。この問題はストリーター [10] と長谷川等 [11] によりやや詳しく議論された。第三の問題点は、減衰理論における non-conventional な取扱い [20]-[25] により導かれたマスター方程式に対応するランジュヴァン方程式の揺動力の相関を、どのように決めたらよいのかという問題である。

また、パーサザラシー等 [26, 27] により量子系の伊藤方程式を確立する試みがなされたが、その研究は対応する量子系のフォッカー・プランク方程式がないまま行われている。ガーディナーとコレット [28] は、非熱統計集団の量子白色雑音の概念を導入し、量子系の伊藤型及びストラトノヴィッチ型の確率微分方程式を初めて研究した。

この論文では、Non-Equilibrium Thermo Field Dynamics (ＮＥＴＦＤ) [29, 30, 31] の枠組みで著者の一人 (T. A.) により定式化された量子系の確率リュウヴィユ方程式 [31, 32] を拡張して、量子系の非熱統計集団に対する白色雑音を持つ量子系確率微分方程式の系統的な体系を、確率的ハイゼンベルグ方程式を用いて構成できることを示す。この体系では、伊藤型及びストラトノヴィッチ型の確率微分方程式が対応するフォッカー・プランク方程式と両立するように定式化され、また、ランジュヴァン方程式の表現空間の問題が解決される。さらに、揺動力演算子のスペクトル密度関数に対して何の制限も設けずに、注目するシステムの時間発展を正準変換として記述することができる。

アインシュタインにより導入された熱揺らぎの確率的解釈は熱現象に対してギブスの統計集団よりも深い理解をもたらしたといわれる。同じように、揺動力の影響を受ける表現空間の設定は、通常粗視化された演算子に対する表現空間である熱空間の設定とは異なる様相をもたらすことが期待される。なお、ＮＥＴＦＤは本来フォッカー・プランク方程式に対応する粗視化のレベルで構築されたものであった。

２章では、ＮＥＴＦＤ以前の量子系のランジュヴァン方程式に纏わる困難をやや詳しく見る。３章は、ＮＥＴＦＤの簡単な歴史と計算規則の紹介にあてられる。４

章では、粗視化された演算子に対するフォッカー・プランク方程式を導入し、ＮＥＴＦＤの体系の説明を行う。５章では、ＮＥＴＦＤの体系を微視的な確率演算子に対するものに拡張し、量子系の確率リウヴィユ方程式を導入する。フォッカー・プランク方程式と確率リウヴィユ方程式の粗視化のレベルの違いに注意を要する。６章では、ストラトノヴィッチ型の確率微分方程式を、確率演算子に対するハイゼンベルグ方程式として導入する。７章では、伊藤型の確率微分とストラトノヴィッチ型の確率微分の間の関係を量子系の確率演算子に対して求める。そこで求めた関係を使って、８章では、伊藤型の確率微分方程式を導く。９章では体系を拡張し、それを減衰理論における non-conventional な取扱いに対応した場合に適用する。これは、久保の第三の問題と関連しているものである。１０章は議論にあてられる。

2. ＮＥＴＦＤ以前

ＮＥＴＦＤ以前の減衰調和振動子に対する量子系のランジュヴァン方程式 [6, 8, 9]

$$\frac{d}{dt}a(t) = -i\omega a(t) - \kappa a(t) + f(t), \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}a^\dagger(t) = i\omega a^\dagger(t) - \kappa a^\dagger(t) + f^\dagger(t), \tag{2}$$

を見てみよう。ただし、 κ は摩擦係数、$a(t)$ $(a^\dagger(t))$ はヒルベルト空間での消滅（生成）確率演算子であり、時刻 $t=0$ で（または、シュレーディンガー表示で）正準交換関係

$$[a(0),\ a^\dagger(0)] = 1, \tag{3}$$

を満たす。確率過程は、通常、揺動力演算子の相関

$$\langle f(t)\rangle = \langle f^\dagger(t)\rangle = 0, \tag{4}$$

$$\langle f^\dagger(t)f(s)\rangle = 2\kappa\bar{n}\delta(t-s), \tag{5}$$

$$\langle f(t)f^\dagger(s)\rangle = 2\kappa(\bar{n}+1)\delta(t-s), \tag{6}$$

で特徴付られるウィーナー過程であるとされる。ただし、

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{\beta\omega}-1}, \tag{7}$$

である。記号 $\langle\cdots\rangle$ は、その確率過程に対するランダム平均を意味する。

正準交換関係が保存することは確率過程についてランダム平均をとったとき、

$$\langle[a(t),\ a^\dagger(t)]\rangle = 1, \tag{8}$$

が成り立つことから示される。これに対して、方程式 (1) と (2) に対してランダム平均をとれば、それぞれ方程式

$$\frac{d}{dt}\langle a(t)\rangle = -i\omega\langle a(t)\rangle - \kappa\langle a(t)\rangle, \tag{9}$$

$$\frac{d}{dt}\langle a^\dagger(t)\rangle = i\omega\langle a^\dagger(t)\rangle - \kappa\langle a^\dagger(t)\rangle, \tag{10}$$

に帰着して、交換関係は、

$$[\langle a(t)\rangle,\ \langle a^\dagger(t)\rangle] = e^{-2\kappa t}, \tag{11}$$

となる。従って、粗視化された演算子 $\langle a(t)\rangle$ と $\langle a^\dagger(t)\rangle$ に対しては正準形式の量子論を作ることができないと言われてきた。しかし、ＮＥＴＦＤの体系ができてからは、これは正しくないことが分かった（４章を参照）[29, 30]。

確率演算子に対する同時刻交換関係を成り立たせるために、揺動力演算子を用いようとする研究がなされた [10, 11]。これは、揺動力演算子に対して条件

$$\begin{aligned}1 &= [a(t),\ a^\dagger(t)]\\ &= \mathrm{e}^{-2\kappa t} + 2\kappa\int_0^\infty dt_1\int_0^\infty dt_2\ \mathrm{e}^{(-i\omega-\kappa)(t-t_1)}\mathrm{e}^{(i\omega-\kappa)(t-t_2)}[f(t_1),\ f^\dagger(t_2)],\end{aligned} \tag{12}$$

を課す。しばしば行われるように、揺動力演算子の系が調和振動子の集まりであると仮定すると、揺動力のスペクトル密度関数が定数になり得ず、従って、揺動力は白色でなくなる。なお、相関 (5)、(6) で与えられる白色過程の揺動力も条件 (12) を満たすが、この相関は調和振動子に対して負のエネルギー状態を要求する。

久保の第二の批判であるＫＭＳ条件 [18, 19] に関する問題とは、相関 (5)、(6) で与えられる白色過程に対して、

$$\int_{-\infty}^{\infty}dt\ \mathrm{e}^{-ik_0t}\langle f^\dagger(t)f(0)\rangle \neq \mathrm{e}^{-\beta k_0}\int_{-\infty}^{\infty}dt\ \mathrm{e}^{-k_0t}\langle f(0)f^\dagger(t)\rangle, \tag{13}$$

となり、一般の k_0 の値に対してＫＭＳ条件を満たさないことである。これは、$\langle f^\dagger(t)f(s)\rangle$ と $\langle f(t)f^\dagger(s)\rangle$ のスペクトルが同時には白色になりえないことを意味する。この困難は我々の体系では緩和されることを後で示す。

3. ＮＥＴＦＤ

ＮＥＴＦＤ [29, 30, 31] は散逸のある場の量子論であり、粗視化された量子場に対する正準形式の理論を可能とする。これは、まず密度演算子形式での減衰理論に

よる議論 [33, 15] を基に、いわゆる対応原理により構成され [29, 30] 、その後、七つの要請から再構成された [34] 。そして、相互作用表示による繰り込まれた時間発展演算子の最も一般的な形が、一粒子分布関数の方程式を用いた表式で求められた [35, 36] 。これらの研究で、ＮＥＴＦＤが散逸のある量子場の正準形式として定式化され、ＮＥＴＦＤと通常の場の量子論との間の構造上の類似性が明らかにされた [37, 38] 。さらに、ＮＥＴＦＤの枠組みで生成汎関数が導かれ [39] 、ＮＥＴＦＤと closed time-path 法 [40]–[42] との関係が示された [43] 。

熱空間における真空の dynamical rearrangement がボゾン変換とＢＣＳモデルに対して研究された [44, 45] 。そこでは、時間に依存する繰り込みの処方を扱い、散逸の自発的発現の機構が調べられた [45, 35, 36] 。

最近、ＮＥＴＦＤの体系は、非平衡量子系のランジュヴァン方程式と確率リウヴィユ方程式をも扱える、広い一般的な体系であることが示された [31, 32] 。この方法により、平衡から遠く離れた量子系のより広い問題が扱えるようになる。そのような系は、ハミルトニアンやラグランジュアンではなく適当な揺動力を持った運動方程式により指定される場合が多いからである。

流体力学的領域にある熱的過程が、ＮＥＴＦＤの体系でも扱われ始めた [46] 。そこでは、非平衡熱力学の概念、特に局所平衡の概念を場の量子論の概念により捉える試みが成されている。これに対して、これまでのＮＥＴＦＤによる研究は、そのほとんどが運動論的領域におけるものであった。

ＮＥＴＦＤは、光学系 [47, 25], [48]–[50] やスピン緩和 [24] 等に適用された。

ＮＥＴＦＤの体系では、任意の演算子 A に対してその相手の演算子 $\tilde{A}$ が存在する。ティルド共役 $\sim$ は関係式

$$(A_1A_2)^\sim = \tilde{A}_1\tilde{A}_2, \tag{14}$$

$$(c_1A_1 + c_2A_2)^\sim = c_1^*\tilde{A}_1 + c_2^*\tilde{A}_2, \tag{15}$$

$$(\tilde{A})^\sim = \sigma A, \tag{16}$$

$$(A^\dagger)^\sim = \tilde{A}^\dagger, \tag{17}$$

により定義される。ただし、ボゾン（フェルミオン）演算子 A に対して$\sigma = 1$ (-1) であり、 c_1 、c_2 は c-数である。

同時刻のティルド付き演算子とティルド無し演算子は互いに可換であり、

$$\langle 1|A^\dagger = \langle 1|\tilde{A}, \tag{18}$$

という関係で結ばれている。任意の演算子 A の期待値は、$\langle 1|A|0\rangle$ により与えられる。

熱真空 $\langle 1|$ と $|0\rangle$ は、ティルド不変である。すなわち、

$$\langle 1|^\sim = \langle 1|, \quad |0\rangle^\sim = |0\rangle, \tag{19}$$

が成り立つ。また、$\langle 1|0\rangle = 1$ のように規格化されている。

ＮＥＴＦＤにおける時間発展演算子 $\hat{H}$ は、ティルディアンと呼ばれる性質

$$(i\hat{H})^{\sim} = i\hat{H}, \tag{20}$$

を持ち、また、熱真空 $\langle 1|$ を消す。すなわち、

$$\langle 1|\hat{H} = 0, \tag{21}$$

が成り立つ。後者の性質により、確率保存が保証される。

以下の議論では、簡単のためボゾンの場合に話を限る。フェルミオンの場合に体系を拡張することは簡単である。また、以下では、演算子 $a(t)$ に、例えば運動量を指定する k 等の添え字を明白に書くことはしないが、散逸のある量子場を扱っていることを忘れないでほしい。

4. フォッカー・プランク方程式

フォッカー・プランク方程式（ＮＥＴＦＤにおけるシュレーディンガー方程式）[29, 30]

$$\frac{\partial}{\partial t}\,|0(t)\rangle = -i\hat{H}\,|0(t)\rangle, \tag{22}$$

で記述される系を考える。時間発展演算子 $\hat{H}$ は

$$\hat{H} = H_S - \tilde{H}_S + i\hat{\Pi}, \tag{23}$$

で与えられる。ただし、H_S は注目する系のハミルトニアンで非線形相互作用を含んでいてもよい。また、$\hat{\Pi}$ は、

$$\hat{\Pi} = -\kappa\left[(2\bar{n}+1)(a^{\dagger}a+\tilde{a}^{\dagger}\tilde{a}) - 2(\bar{n}+1)a\tilde{a} - 2\bar{n}a^{\dagger}\tilde{a}^{\dagger}\right] - 2\kappa\bar{n}, \tag{24}$$

という表式で与えられる散逸を記述する演算子である。$\bar{n}$ は式 (7) で定義され、ω は注目する系のエネルギー量子である。演算子 $\hat{H}$ は、ＮＥＴＦＤにおける時間発展演算子の一般的性質、式 (20) と (21) を満たすことが分かる。ここで現れる演算子 a, $a^{\dagger}$, $\tilde{a}$ 及び$\tilde{a}^{\dagger}$ は、粗視化された演算子であることに注意を要する。

演算子 (23) 式は、減衰理論の conventional な取扱いを用いて、系と線形に結合した温度 β^{-1} の熱浴を消去することにより得たものと同等である。その取扱いでは、注目する系内の自己相互作用が系の緩和に及ぼす効果を無視している。通常の現象論的理論はこの場合に分類される。

ＮＥＴＦＤにおけるハイゼンベルグ方程式は、(22) 式で記述される系に対して、

$$\frac{d}{dt}A(t) = i[\hat{H},\ A(t)], \tag{25}$$

で与えられる。粗視化された演算子に対するハイゼンベルグ方程式 (25) が存在することが、ＮＥＴＦＤの顕著な特徴であることを強調しておきたい。これにより、散逸のある場の量子論を、正準形式で構成することが可能となったのである。すなわち、ハイゼンベルグ表示の粗視化された演算子 $a(t)$ に対して、同時刻正準交換関係

$$[a(t),\ a^\dagger(t)] = 1, \tag{26}$$

が成り立つような場の量子論を構成することができたのである。

また、粗視化された演算子に対して同時刻正準交換関係 (26) が存在することにより、揺動力演算子のスペクトル密度関数が、文献 [6],[8]–[11] の量子系ランジュヴァン方程式の体系にあるような特別な形に限定されることがなくなった。これらの文献の体系では、粗視化された演算子に対して同時刻正準交換関係が成り立たず（(11) 式を参照)、したがって、揺動力演算子は注目する系の演算子に対する同時刻正準交換関係を回復する目的で導入されている。このため、揺動力演算子に条件が課され、それが揺動力演算子のスペクトル密度関数をある特別の形に制限するのである。そして、前に述べたように、そのスペクトル密度関数のために揺動力演算子の相関が白色になれないのである。この点から考えると、ＮＥＴＦＤの体系は、量子場に対する系統的な確率過程論を構成する適切な足場を与えることが予想される。以下の議論に見るように、この予想は正しかったのである。

5. 確率リウヴィュ方程式

量子系に対する確率リウヴィュ方程式は、確率的時間発展演算子

$$\hat{H}_f(t)dt = \hat{H}_S dt + \left[(a^\dagger - \tilde{a})\left\{id(a+\tilde{a}^\dagger)/2 + [\hat{H}_S,\ (a+\tilde{a}^\dagger)/2]dt\right\} - \mathrm{t.c.}\right], \tag{27}$$

を用いて、

$$d\,|0_f(t)\rangle = -i\hat{H}_f(t)dt\ |0_f(t)\rangle, \tag{28}$$

と表される [31, 32]。ただし、式 (27) 中の演算子 da と $d\tilde{a}^\dagger$ はシュレーディンガー表示での時間微分演算子[†] で、それぞれ、

$$da = i[\hat{H}_S,\ a]dt - \kappa\tilde{a}^\dagger dt + \frac{1}{2}[dF^{(S)}(t) + d\tilde{F}^{(S)\dagger}(t)], \tag{29}$$

[†] シュレーディンガー表示での時間微分演算子 dA は通常の量子力学と同様に、$dA(t) = \hat{S}_f^{-1}(t)\ dA\ \hat{S}_f(t)$ により定義され、$dA = i[\hat{H}_f(t)dt,\ A]$ となる。従って、時間微分演算子の形式的な構造は量子系の確率的ハイゼンベルグ（量子系ランジュヴァン）方程式と同じである。

$$da^\dagger = i[\hat{H}_S,\ a^\dagger]dt - \kappa\tilde{a}dt + \frac{1}{2}[dF^{(S)\dagger}(t) + d\tilde{F}^{(S)}(t)], \tag{30}$$

と与えられる。また、演算子 a と $a^\dagger$ は正準交換関係

$$[a,\ a^\dagger] = 1, \tag{31}$$

を満たす。シュレーディンガー表示における揺動力演算子 $dF^{(S)}(t)$ 等はウィーナー過程であり、その相関は、

$$\langle dF^{(S)}(t)\rangle = \langle dF^{(S)\dagger}(t)\rangle = 0, \tag{32}$$

$$\langle dF^{(S)\dagger}(t)dF^{(S)}(s)\rangle = 2\kappa\bar{n}\delta(t-s)dtds, \tag{33}$$

$$\langle dF^{(S)}(t)dF^{(S)\dagger}(s)\rangle = 2\kappa(\bar{n}+1)\delta(t-s)dtds, \tag{34}$$

$$\langle dF^{(S)}(t)dF^{(S)}(s)\rangle = \langle dF^{(S)\dagger}(t)dF^{(S)\dagger}(s)\rangle = 0, \tag{35}$$

で与えられる。これらの相関は確率過程の白色性を表している。[‡] ただし、記号 $\langle\cdots\rangle$ は、揺動力演算子 $F^{(S)}(t)$ 及び $F^{(S)\dagger}(t)$ についてランダム平均をとることを示す。揺動力演算子 $dF^{(S)}(t)$ 、$dF^{(S)\dagger}(t)$ に対して、式 (18) と同様の性質

$$\langle dF^{(S)\dagger}(t)\cdots\rangle = \langle d\tilde{F}^{(S)}(t)\cdots\rangle, \tag{36}$$

が成り立つことに注意。ウィーナー過程はガウス過程であるから、式 (32)–式 (35) によりその確率過程が完全に決定される。式 (27) 中の記号 t.c. はティルド共役をとることを示す。

揺動力演算子 $dF^{(S)}(t)$ 及び $dF^{(S)\dagger}(t)$ は、注目する系の任意のシュレーディンガー表示での演算子 A と可換であると仮定する。すなわち、

$$[A,\ dF^{(S)}(t)] = [A,\ dF^{(S)\dagger}(t)] = 0, \tag{37}$$

であるとする。この仮定は、揺動力演算子の確率過程がシュレーディンガー表示では注目する系と無関係である、という考えに基づくものである。

演算子 $\hat{H}_f(t)$ は、少なくとも三つの条件を満足しなければならない。一番目の条件は、(20) 式で表されるティルディアンでなければならない、ということである。すなわち、

$$(i\hat{H}_f(t))^\sim = i\hat{H}_f(t), \tag{38}$$

[‡]式 (32) は揺動力演算子の性質 $\langle F^{(S)}(t)\rangle = 0$ より得られる。微分形の相関 (33) 式 及び (34) 式は、例えば、$\langle F^{(S)\dagger}(t)F^{(S)}(s)\rangle = 2\kappa\bar{n}\min(t,s)$ を二度微分することにより得られる。

を満たさなければならない。二番目は確率保存の要請から来る (21) 式

$$\langle 1|\hat{H}_f(t) = 0, \tag{39}$$

を満たすことで、三番目は確率リウヴィユ方程式 (28) が、ランダム平均をとったときに、対応するフォッカー・プランク方程式 (22) になる [31, 32] ことである。演算子 (27) 式が最初の二つの条件を満たすことはたやすく分かる。

最後の条件に関しては、次のようにして系統的に確かめる [31, 32] ことができる。すなわち、確率リウヴィユ方程式 (28) のランダム平均をとると、

$$\begin{aligned}\langle d\,|0_f(t)\rangle\rangle &= d|0(t)\rangle \\ &= -i\left\langle \hat{H}_f(t)dt|0_f(t)\rangle\right\rangle \\ &= -i\hat{H}dt|0(t)\rangle,\end{aligned} \tag{40}$$

となる。ただし、

$$|0(t)\rangle = |\langle 0_f(t)\rangle\rangle\,, \tag{41}$$

であり、また、

$$-i\hat{H} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\hat{K}(t_1)dt_1, \tag{42}$$

で、演算子 $\hat{K}(t)$ は、

$$\hat{K}(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty}\hat{K}_n(t)dt, \tag{43}$$

と

$$\hat{K}_n(t)dt = (-i)^n\int_0^t\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{n-2}}\langle\hat{H}_f(t)dt\hat{H}_f(t_1)dt_1\cdots\hat{H}_f(t_{n-1})dt_{n-1}\rangle_{o.c.}. \tag{44}$$

で与えられる。記号 $\langle\cdots\rangle_{o.c.}$ は順序付きキュムラント [33] で、その低次のものを挙げると、任意の演算子 $X(t)$ に対して、

$$\langle X(t)\rangle_{o.c.} = \langle X(t)\rangle, \tag{45}$$

$$\langle X(t)X(t_1)\rangle_{o.c.} = \langle X(t)X(t_1)\rangle - \langle X(t)\rangle\langle X(t_1)\rangle, \tag{46}$$

$$\begin{aligned}\langle X(t)X(t_1)X(t_2)\rangle_{o.c.} &= \langle X(t)X(t_1)X(t_2)\rangle - \langle X(t)X(t_1)\rangle\langle X(t_2)\rangle \\ &\quad -\langle X(t)X(t_2)\rangle\langle X(t_1)\rangle - \langle X(t)\rangle\langle X(t_1)X(t_2)\rangle \\ &\quad +\langle X(t)\rangle\langle X(t_1)\rangle\langle X(t_2)\rangle + \langle X(t)\rangle\langle X(t_2)\rangle\langle X(t_1)\rangle,\end{aligned} \tag{47}$$

となる。(29) 式と (30) 式を (27) 式に代入してウィーナー過程の相関 (32) 式–(35) 式を用いると、フォッカー・プランク方程式 (22) 中の時間発展演算子 $\hat{H}$ が、

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\left\{\langle \hat{H}_f(t_1)dt_1\rangle - i\int_0^{t_1}\langle \hat{H}_f(t_1)dt_1\hat{H}_f(t_2)dt_2\rangle_{o.c.}\right\} \\ &= \hat{H}_S + i\hat{\Pi}, \end{aligned} \tag{48}$$

のように得られる。ただし、$\hat{H}_S = H_S - \tilde{H}_S$ である。

6. ストラトノヴィッチ型確率微分方程式

任意の演算子 $A(t)$ に対するストラトノヴィッチ型のランジュヴァン方程式は、上記の三つの条件を満足する時間発展演算子 $\hat{H}_f(t)$ で書かれるハイゼンベルグ運動方程式

$$dA(t) = i\left[\hat{H}_f^{(H)}(t)dt,\ A(t)\right], \tag{49}$$

として得られる。ただし、

$$\hat{H}_f^{(H)}(t) = \hat{S}_f^{-1}(t)\hat{H}_f(t)\hat{S}_f(t), \tag{50}$$

であり、演算子 $\hat{S}_f(t)$ は、

$$d\hat{S}_f(t) = -i\hat{H}_f(t)dt\ \hat{S}_f(t), \tag{51}$$

を満たし、その初期条件は $\hat{S}_f(0) = 1$ である。ここで、注目している系は、$dF^{(S)}(t)$ 等で記述される系と時刻 $t = 0$ に相互作用を始めたと仮定している。我々は (49) 式を量子系確率的ハイゼンベルグ方程式と名付けた [51] 。仮定 (37) 式により、ハイゼンベルグ表示の演算子に対して同時刻交換関係

$$[a(t),\ dF(t)] = 0, \qquad \left[a^\dagger(t),\ dF(t)\right] = 0, \qquad \text{etc.}, \tag{52}$$

が成り立つ。ただし、ここではハイゼンベルグ表示の演算子とは、

$$a(t) = \hat{S}_f^{-1}(t)a\hat{S}_f(t), \quad dF(t) = \hat{S}_f^{-1}(t)dF^{(S)}(t)\hat{S}_f(t). \tag{53}$$

により定義されるものである。ここで、演算子 $a(t)$ は微視的な確率演算子を表す。粗視化された演算子と、微視的な確率演算子の両方に対して同一の記法 $a(t)$ を用いたわけだが、以後特に混乱する恐れの無い限り、微視的な確率演算子に対してこの記法

を用いることにする。(31) 式とハイゼンベルグ演算子の定義 (53) 式を用いれば、ハイゼンベルグ表示における確率演算子の正準交換関係

$$[a(t),\ a^\dagger(t)] = 1, \tag{54}$$

も成り立つことが分かる。

方程式 (29) と (30) を (27) に代入した表式を (49) に用いると、注目する系の確率的ハイゼンベルグ方程式の具体的な表式

$$\begin{aligned} dA(t) = i[\hat{H}_S(t),\ A(t)]dt \\ &+\frac{1}{2}\kappa\left\{\left[\left(a^\dagger(t)-\tilde{a}(t)\right)\left(a(t)+\tilde{a}^\dagger(t)\right),\ A(t)\right]\right. \\ &+\left.\left[\left(\tilde{a}^\dagger(t)-a(t)\right)\left(\tilde{a}(t)+a^\dagger(t)\right),\ A(t)\right]\right\}dt \\ &-\frac{1}{2}\left\{\left[a^\dagger(t)-\tilde{a}(t),\ A(t)\right]\circ\left[dF(t)+d\tilde{F}^\dagger(t)\right]\right. \\ &+\left.\left[\tilde{a}^\dagger(t)-a(t),\ A(t)\right]\circ\left[d\tilde{F}(t)+dF^\dagger(t)\right]\right\}, \end{aligned} \tag{55}$$

を得る。ただし、記号 $\circ$ はストラトノヴィッチ型の積を示し、また、

$$\hat{H}_S(t) = \hat{S}_f^{-1}(t)\hat{H}_S\hat{S}_f(t), \tag{56}$$

である。確率的ハイゼンベルグ方程式 (49) を用いると、任意の注目する系の演算子 A と B に対して、

$$d[A(t)B(t)] = dA(t)\cdot B(t) + A(t)\cdot dB(t), \tag{57}$$

が成り立つことが直ちに示される。この事実は、確率的ハイゼンベルグ方程式 (55) がストラトノヴィッチ型の量子系のランジュヴァン方程式にほかならないことを示している。A が a と $a^\dagger$ の場合には、(55) 式は、

$$da(t) = i\left[\hat{H}_S(t),\ a(t)\right]dt - \kappa\tilde{a}^\dagger(t)dt + \frac{1}{2}\left[dF(t)+d\tilde{F}^\dagger(t)\right], \tag{58}$$

$$da^\dagger(t) = i[\hat{H}_S(t),\ a^\dagger(t)]dt - \kappa\tilde{a}(t)dt + \frac{1}{2}[dF^\dagger(t)+d\tilde{F}(t)], \tag{59}$$

となる。(58) 式と (59) 式の形式的な構造はそれぞれ、(29) 式と (30) 式とに一致している。

調和振動子系の場合には、系のハミルトニアンは、

$$H_S = \omega a^\dagger a, \tag{60}$$

で与えられ、量子系ランジュヴァン方程式 (58) と (59) は、

$$da(t) = -\omega a(t)dt - \kappa\tilde{a}^\dagger(t)dt + \frac{1}{2}\left[dF(t) + d\tilde{F}^\dagger(t)\right], \tag{61}$$

$$da^\dagger(t) = i\omega a^\dagger(t)dt - \kappa\tilde{a}(t)dt + \frac{1}{2}[dF^\dagger(t) + d\tilde{F}(t)], \tag{62}$$

となる。ＮＥＴＦＤ以前のランジュヴァン方程式 (1) 式、(2) 式 と (61) 式、(62) 式との違いに注意してほしい。方程式 (61) と (62) の右辺にティルド付き演算子が含まれているのがこの系統的な体系の新しい特徴であり、量子系ランジュヴァン方程式を構成するのにＮＥＴＦＤが不可欠であることを示している。

$\hat{S}_f(t)$ を通して注目しない系も注目する系から動的な影響を受けるので、ハイゼンベルグ表示における揺動力演算子 $dF(t)$ 等の相関はたとえランダム平均をとったとしても、複雑な構造をしているであろう。しかしながら、

$$dW^{(S)}(t) = \frac{1}{2}\left[dF^{(S)}(t) + d\tilde{F}^{(S)\dagger}(t)\right], \tag{63}$$

に対して、相関 (33)-(35) を用いると、確率収束の意味で、

$$dW^{(S)}(t)d\tilde{W}^{(S)}(s) = d\tilde{W}^{(S)}(s)dW^{(S)}(t) = \kappa(2\bar{n}+1)\delta(t-s)dtds, \tag{64}$$

$$dW^{(S)}(t)dW^{(S)}(s) = d\tilde{W}^{(S)}(t)d\tilde{W}^{(S)}(s) = 0, \tag{65}$$

が成り立つことが分かる。(64) 式と (65) 式の最初の等号により、交換関係

$$[\hat{S}_f(t),\ dW^{(S)}(t)] = 0, \quad [\hat{S}_f(t),\ d\tilde{W}^{(S)}(t)] = 0. \tag{66}$$

が示される。したがって、ハイゼンベルグ表示の揺動力演算子

$$dW(t) = \hat{S}_f^{-1}(t)dW^{(S)}(t)\hat{S}_f(t), \tag{67}$$

に対して、

$$dW(t) = dW^{(S)}(t), \quad d\tilde{W}(t) = d\tilde{W}^{(S)}(t), \tag{68}$$

が成り立ち、

$$dW(t)d\tilde{W}(s) = d\tilde{W}(s)dW(t) = dW^{(S)}(t)d\tilde{W}^{(S)}(s) = \kappa(2\bar{n}+1)\delta(t-s)dtds, \tag{69}$$

となることが分かる。すなわち、$dF(t)$ 等は注目する系との相互作用による影響を受けるが、$dW(t)$ 等はその影響を受けないわけである。このことと併せて、確率微分方程式 (55) には揺動力演算子が $dW(t)$ と $d\tilde{W}(t)$ の形でのみ入っており、$\hat{H}_f(t)$ に

よる動的効果が $dW(t)$ と $d\tilde{W}(t)$ に対しては相殺されること、すなわち、揺動力演算子 $dW(t)$ と $d\tilde{W}(t)$ の時間発展はその確率過程でのみ決ることに注意すれば、これは、量子系ランジュヴァン方程式に関する久保の第一の問題 [17] を解決することが分かる。

ランジュヴァン方程式を用いた方法では、揺動力の相関を与えて初めて系の力学的振舞いを指定できる。量子系ランジュヴァン方程式はハイゼンベルグ表示の方程式であるから、揺動力演算子の特徴付けもハイゼンベルグ表示で行われなければならない。揺動力演算子 $dF(t)$ 等では、$\hat{H}_f(t)$ により生成される動力学により確率過程の情報が隠されてしまうので、これらの演算子をもって揺動力演算子の特徴付けを行うことはできない。これに対して、$dW(t)$ 等では関係式 (69) により、その相関の指定が直接確率過程の特徴付けになるのである。

また、$dW(t)$ と $dW^\dagger(t) = d\tilde{W}(t)$ が可換であることより、

$$\langle dW(t)dW^\dagger(s)\rangle = \langle dW^\dagger(s)dW(t)\rangle, \tag{70}$$

が成り立つ。したがって、揺動力演算子の相関に対するＫＭＳ条件に関わる久保の第二の問題 [17] も同時に解決したといえる。

7. 確率微分

量子系の伊藤及びストラトノヴィッチ積分の定義は、時間 $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_N < s_{N+1} = t$ に対して条件 $\lim_{N\to\infty} \max_{i=0}^{N} |s_{i+1} - s_i| = 0$ の下で、それぞれ、

$$(\mathrm{I}) \int_0^t g(s)dW(s) = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N} g(s_i)\left[W(s_{i+1}) - W(s_i)\right], \tag{71}$$

及び、

$$(\mathrm{S}) \int_0^t g(s) \circ dW(s) = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N} g(\bar{s}_i)\left[W(s_{i+1}) - W(s_i)\right], \tag{72}$$

で与えられる。ただし、$g(s)$ はあるハイゼンベルグ表示の演算子であり、また、$\bar{s}_i = (s_{i+1} + s_i)/2$ である。極限は二乗平均極限の意味でとる。

(71) 式及び (72) 式より、伊藤確率積分とストラトノヴィッチ確率積分とをつなぐ変換公式が、微分型で、

$$g(t) \circ dW(t) = g(t)dW(t) + \frac{1}{2}dg(t)dW(t), \tag{73}$$

と求まる [28] 。$g(t)$ が注目する系の演算子から成るとき、$dg(t)$ は確率的ハイゼンベルグ方程式 (49) で与えられる。この場合、式 (50) と (27) 、(29) 、及び (30) で与え

られる $\hat{H}_f^{(H)}(t)$ の具体的な表式を用いると、公式 (73) は、

$$g(t) \circ dW(t) = g(t)dW(t) - \kappa(2\bar{n}+1)\left[\tilde{a}^\dagger(t) - a(t),\ g(t)\right] dt, \tag{74}$$

となる。ここで、(69) の性質と $dW(t)dt$ が高次項として無視できるということを使った。

8. 伊藤型確率微分方程式

前章で導かれた伊藤型とストラトノヴィッチ型の積の間の変換公式 (74) を用いて、ストラトノヴィッチ型の量子系確率微分方程式 (55) から伊藤型の量子系確率微分方程式を導くことができ、それは、

$$\begin{aligned} dA(t) = i&\left[\hat{H}_S(t),\ A(t)\right] dt \\ &+\frac{1}{2}\kappa\left\{\left[\left(a^\dagger(t) - \tilde{a}(t)\right)\left(a(t) + \tilde{a}^\dagger(t)\right),\ A(t)\right]\right. \\ &+\left.\left[\left(\tilde{a}^\dagger(t) - a(t)\right)\left(\tilde{a}(t) + a^\dagger(t)\right),\ A(t)\right]\right\} dt \\ &+\frac{1}{2}\kappa(2\bar{n}+1)\left\{\left[\tilde{a}^\dagger(t) - a(t),\ \left[a^\dagger(t) - \tilde{a}(t),\ A(t)\right]\right]\right. \\ &+\left.\left[a^\dagger(t) - \tilde{a}(t),\ \left[\tilde{a}^\dagger(t) - a(t),\ A(t)\right]\right]\right\} dt \\ &-\frac{1}{2}\left\{\left[a^\dagger(t) - \tilde{a}(t),\ A(t)\right]\left[dF(t) + d\tilde{F}^\dagger(t)\right]\right. \\ &+\left.\left[\tilde{a}^\dagger(t) - a(t),\ A(t)\right]\left[d\tilde{F}(t) + dF^\dagger(t)\right]\right\}, \end{aligned} \tag{75}$$

となる。また、(75) 式を使うと、任意の注目する系の確率演算子 A 、Bに対して、積 $dA(t)dB(t)$ が、

$$\begin{aligned} dA(t)dB(t) = \kappa(2\bar{n}+1)&\left\{[a^\dagger(t) - \tilde{a}(t),\ A(t)][\tilde{a}^\dagger - a(t),\ B(t)]\right. \\ &+\left.[\tilde{a}^\dagger(t) - a(t),\ A(t)][a^\dagger(t) - \tilde{a}(t),\ B(t)]\right\} dt, \end{aligned} \tag{76}$$

となることが分かり、伊藤型の公式

$$d[A(t)B(t)] = dA(t)\cdot B(t) + A(t)\cdot dB(t) + dA(t)dB(t), \tag{77}$$

が得られる。これは、確かに、量子系確率微分方程式 (75) が伊藤型のものであることを示している。さらに、(75) 式が任意の注目する系の確率演算子 $A(t)$ に対する時間発展方程式であることから、それは、量子系の伊藤公式であることが分かる。

方程式 (75) のランダム平均と真空期待値をとると、任意の注目する系の演算子 $A(t)$ の期待値に対する運動方程式

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle\!\langle A(t)\rangle\!\rangle = i\,\langle\!\langle [H_S(t),\ A(t)]\rangle\!\rangle \\ -\kappa\left(\langle\!\langle a^\dagger(t)[A(t),\ a(t)]\rangle\!\rangle + \langle\!\langle [a^\dagger(t),\ A(t)]a(t)\rangle\!\rangle\right) \\ +2\kappa\bar{n}\langle\!\langle [a^\dagger(t),\ [A(t),\ a(t)]]\rangle\!\rangle,\end{aligned} \tag{78}$$

を得る。ただし、$\langle\!\langle\cdots\rangle\!\rangle = \langle 1|\langle\cdots\rangle|0\rangle$ であり、ランダム平均と真空期待値の両方をとることを意味する。これは、熱浴と線形に結合した散逸系に対する厳密な運動方程式であり、フォッカー・プランク方程式 (22) からも得ることができる。ここで、伊藤微分の定義からくる性質

$$\langle a(t)dW(t)\rangle = 0, \quad \text{etc.}, \tag{79}$$

を使った。(78) 式は非線形相互作用を含む任意の $\hat{H}_S$ に対して導かれたものであることに注意してほしい。

9. Non-Conventional な取扱い

前章では、注目する系の非線形性がその緩和に及ぼす影響を無視した取扱い(減衰理論の conventional な取扱い)に対応した場合に限って話を進めてきた。この章では、この体系を non-conventional な取扱い [20]- [25], [52, 53] の場合に拡張する。これは、久保の第三の問題 [17] に関わる問題である。

例として、ハミルトニアン

$$H_S = \omega a^\dagger a + \frac{1}{2}g\ a^\dagger a^\dagger a a, \tag{80}$$

により指定されるボゾン系を考える。

この系のフォッカー・プランク方程式は、ハミルトニアン (80) と緩和を記述する演算子

$$\begin{aligned}\hat{\Pi} &= -(a^\dagger - \tilde{a})[K(\bar{N}+1)a - \tilde{a}^\dagger\tilde{K}\tilde{\bar{N}}] + \text{t.c.} \\ &= -(a^\dagger - \tilde{a})\left\{e^{a^\dagger a g\frac{\partial}{\partial\omega}}a\kappa(\omega)[\bar{n}(\omega)+1] - \tilde{a}^\dagger e^{\tilde{a}^\dagger\tilde{a}g\frac{\partial}{\partial\omega}}\kappa(\omega)\bar{n}(\omega)\right\} + \text{t.c.},\end{aligned} \tag{81}$$

を用いて (22) 式で与えられる。ただし、

$$K = \kappa(\omega + g a^\dagger a) = e^{a^\dagger a g\frac{\partial}{\partial\omega}}\kappa(\omega), \tag{82}$$

$$\bar{N} = \bar{n}(\omega + g a^\dagger a) = e^{a^\dagger a g\frac{\partial}{\partial\omega}}\bar{n}(\omega), \tag{83}$$

であり、$\bar{n}(\omega)$ は (7) 式で与えられる。

この系の確率リウヴィユ方程式 (28) の時間発展演算子 $\hat{H}_f(t)$ は、

$$\hat{H}_f(t)dt = \hat{H}_S dt - \frac{i}{2}\left\{(a^\dagger - \tilde{a})(Ka + \tilde{a}^\dagger \tilde{K}) + t.c.\right\} dt$$
$$+\frac{i}{2}\left\{(a^\dagger - \tilde{a})G(a, a^\dagger, \tilde{a}, \tilde{a}^\dagger)[dF^{(S)}(t) + d\tilde{F}^{(S)\dagger}(t)] + t.c.\right\}, \qquad (84)$$

で与えられる。ただし、

$$G = G(a, a^\dagger, \tilde{a}, \tilde{a}^\dagger) = e^{-\frac{1}{2}(a^\dagger a^\dagger aa - \tilde{a}^\dagger \tilde{a}^\dagger \tilde{a}\tilde{a}) g \frac{\partial}{\partial \omega}}, \qquad (85)$$

である。時間発展演算子が (84) 式で与えられる確率リウヴィユ方程式 (28) のランダム平均をとれば、フォッカー・プランク方程式 (22) において、時間発展演算子がハミルトニアン (80) と緩和を記述する演算子 (81) を用いて書かれたものが得られる。

系のストラトノヴィッチ型の確率微分方程式（確率的ハイゼンベルグ方程式）は、

$$\begin{aligned} dA(t) &= i\left[\hat{H}_f^{(H)}(t)dt,\ A(t)\right] \\ &= i\left[\hat{H}_S(t),\ A(t)\right] dt \\ &\quad +\frac{1}{2}\left\{\left[\left(a^\dagger(t) - \tilde{a}(t)\right)\left(K(t)a(t) + \tilde{a}^\dagger(t)\tilde{K}(t)\right),\ A(t)\right]\right. \\ &\quad \left. + \left[\left(\tilde{a}^\dagger(t) - a(t)\right)\left(\tilde{K}(t)\tilde{a}(t) + a^\dagger(t)K(t)\right),\ A(t)\right]\right\} dt \\ &\quad -\left\{\left[\left(a^\dagger(t) - \tilde{a}(t)\right)G(t),\ A(t)\right] \circ dW(t)\right. \\ &\quad \left. + \left[\left(\tilde{a}^\dagger(t) - a(t)\right)\tilde{G}(t),\ A(t)\right] \circ d\tilde{W}(t)\right\}, \end{aligned} \qquad (86)$$

となる。ただし、

$$G(t) = \hat{S}_f^{-1}(t) G \hat{S}_f(t), \quad K(t) = \hat{S}_f(t) K \hat{S}_f(t), \qquad (87)$$

である。(86) 式はストラトノヴィッチ型の確率微分の公式 (57) を満足するので、確率的ハイゼンベルグ方程式 (86) が真にストラトノヴィッチ型の量子系ランジュヴァン方程式であることが分かる。

ストラトノヴィッチ型と伊藤型の微分の関係式 (73) を用いると、(86) は伊藤型の確率微分方程式

$$\begin{aligned} dA(t) &= i\left[\hat{H}_S(t),\ A(t)\right] dt \\ &\quad +\frac{1}{2}\left\{\left[\left(a^\dagger(t) - \tilde{a}(t)\right)\left(K(t)a(t) + \tilde{a}^\dagger(t)\tilde{K}(t)\right),\ A(t)\right]\right. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left[\left(\tilde{a}^{\dagger}(t)-a(t)\right)\left(\tilde{K}(t)\tilde{a}(t)+a^{\dagger}(t)K(t)\right),\ A(t)\right]\Big\}\,dt \\
&+\frac{1}{2}\Big\{\left[\left(\tilde{a}^{\dagger}(t)-a(t)\right)\tilde{G}(t),\ \left[\left(a^{\dagger}(t)-\tilde{a}(t)\right)G(t),\ A(t)\right]\right] \\
&+\left[\left(a^{\dagger}(t)-\tilde{a}(t)\right)G(t),\ \left[\left(\tilde{a}^{\dagger}(t)-a(t)\right)\tilde{G}(t),\ A(t)\right]\right]\Big\}\kappa(\omega)[2\bar{n}(\omega)+1]dt \\
&-\Big\{\left[\left(a^{\dagger}(t)-\tilde{a}(t)\right)G(t),\ A(t)\right]dW(t) \\
&+\left[\left(\tilde{a}^{\dagger}(t)-a(t)\right)\tilde{G}(t),\ A(t)\right]d\tilde{W}(t)\Big\},
\end{aligned}
\tag{88}
$$

となる。実際、この式より、

$$
\begin{aligned}
dA(t)dB(t)=\Big\{&\left[\left(a^{\dagger}(t)-\tilde{a}(t)\right)G(t),\ A(t)\right]\left[\left(\tilde{a}^{\dagger}(t)-a(t)\right)\tilde{G}(t),\ B(t)\right] \\
&+\left[\left(\tilde{a}^{\dagger}(t)-a(t)\right)\tilde{G}(t),\ A(t)\right]\left[\left(a^{\dagger}(t)-\tilde{a}(t)\right)G(t),\ B(t)\right]\Big\} \\
&\times\kappa(\omega)[2\bar{n}(\omega)+1]dt,
\end{aligned}
\tag{89}
$$

となることが分かり、伊藤型の計算公式 (77) を得る。

方程式 (88) のランダム平均と真空期待値をとると、任意の注目する系の演算子 $A(t)$ の期待値の運動方程式

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle\!\langle A(t)\rangle\!\rangle=&-i\langle\!\langle A(t)\hat{H}_S(t)\rangle\!\rangle \\
&-\frac{1}{2}\Big\{\langle\!\langle A(t)\left(a^{\dagger}(t)-\tilde{a}(t)\right)\left(K(t)a(t)+\tilde{a}^{\dagger}(t)\tilde{K}(t)\right)\rangle\!\rangle \\
&+\langle\!\langle A(t)\left(\tilde{a}^{\dagger}(t)-a(t)\right)\left(\tilde{K}(t)\tilde{a}(t)+a^{\dagger}(t)K(t)\right)\rangle\!\rangle\Big\} \\
&+\frac{1}{2}\Big\{\langle\!\langle A(t)\left(a^{\dagger}(t)-\tilde{a}(t)\right)G(t)\left(\tilde{a}^{\dagger}(t)-a(t)\right)\tilde{G}(t)\rangle\!\rangle \\
&+\langle\!\langle A(t)\left(\tilde{a}^{\dagger}(t)-a(t)\right)\tilde{G}(t)\left(a^{\dagger}(t)-\tilde{a}(t)\right)G(t)\rangle\!\rangle\Big\} \\
&\times\kappa(\omega)[2\bar{n}(\omega)+1],
\end{aligned}
\tag{90}
$$

を得る。これは、フォッカー・プランク方程式 (22) において、時間発展演算子がハミルトニアン (80) と緩和を記述する演算子 (81) で与えられたものを用いて導いた式と一致する。

10．議論

量子系に対して、系統的な確率微分方程式の体系（ランジュヴァン方程式と確率リウヴィユ方程式の両方を含む）を、「(27) 式または (84) 式の確率的時間発展演

算子 $\hat{H}_f(t)$ で書かれるハイゼンベルグ方程式としてランジュヴァン方程式が与えられる」という要請の下に構成した。これは、ＮＥＴＦＤの体系を拡張することにより成し遂げられた。量子系確率リウヴィユ方程式を揺動力演算子に関して平均をとることにより、対応するフォッカー・プランク方程式が得られる。このフォッカー・プランク方程式はＮＥＴＦＤにおけるシュレーディンガー方程式であり、粗視化された巨視的演算子で書かれている。これに対して、$\hat{H}_f(t)$ により生成されるハイゼンベルグ運動方程式は微視的な確率演算子に対するストラトノヴィッチ型の量子系ランジュヴァン方程式である。量子系の演算子に対する伊藤型とストラトノヴィッチ型の確率微分を定式化して、伊藤型の量子系ランジュヴァン方程式をストラトノヴィッチ型のものから導出した。伊藤型の量子系ランジュヴァン方程式のランダム平均と真空期待値をとって得られる運動方程式は、フォッカー・プランク方程式から得られるものと厳密に等しいことが示された。

このように、量子系に対しても確率微分方程式の体系が、系統的に定式化できることは、以前には知られていなかった。確率的時間発展演算子 $\hat{H}_f(t)$ の発見は、この系統的な体系を構成するうえで鍵となるものであり、それは、ＮＥＴＦＤの体系でのみ可能だったのである。このことは、量子系ランジュヴァン方程式にティルド無し演算子とティルド付き演算子が共に存在していることから見てとれる（ 方程式 (61) と (62) を参照のこと)。この事実は、ＮＥＴＦＤが今後さらに発展しより深く理解されるうえで、大きな影響をもたらすであろう。

この論文を終る前に、いくつかコメントを加えておく。系内に相互作用がない場合、すなわち、系のハミルトニアン H_S が $a^\dagger$ と a に関して双一次の場合には、(27) 式で与えられる確率的時間発展演算子 $\hat{H}_f(t)$ は文献 [31] 、[32] 、[52] 及び [53] で導入された演算子

$$\hat{H}_f^{(0)}(t)dt = \frac{1}{2}(a^\dagger - \tilde{a})id(a + \tilde{a}^\dagger) - \text{t.c.}, \tag{91}$$

と一致する。この論文で定式化された体系は、式 (27) の $\hat{H}_f(t)dt$ 中の $(a + a^\dagger)/2$ を $\alpha + \beta = 1$ を満たす α、β を用いて$\alpha a + \beta\tilde{a}^\dagger$ としても構成できる。これについては、別の論文で議論を行う予定である。また、この量子系確率微分方程式の数学的な基礎付けは、大変興味深い未解決の問題である。

謝辞

有用なコメントをいただいた番　雅司博士に、深く感謝の意を表したい。

参考文献

1. A. Einstein, *Ann. Physik* **17** (1905) 549.

2. P. Langevin, *Compte Rendus* **146** (1908) 533.

3. K. Ito, *Proc. Imp. Acad. Tokyo* **20** (1944) 519.

4. R. L. Stratonovich, *J. SIAM Control* **4** (1966) 362.

5. R. Kubo, *J. Math. Phys.* **4** (1963) 174.

6. I. R. Senitzky, *Phys. Rev.* **119** (1960) 670.

7. H. Mori, *Prog. Theor. Phys.* **33** (1965) 423.

8. M. Lax, *Phys. Rev.* **145** (1966) 110.

9. H. Haken, *Optics. Handbuch der Physik* vol. XXV/2c (1970), [*Laser Theory* (Springer, Berlin, 1984)], and the references therein.

10. R. F. Streater, *J. Phys. A: Math. Gen.* **15** (1982) 1477.

11. H. Hasegawa, J. R. Klauder and M. Lakshmanan, *J. Phys. A: Math. Gen.* **18** (1985) L123.

12. S. Nakajima, *Prog. Theor. Phys.* **20** (1958) 948.

13. R. Zwanzig, *J. Chem. Phys.* **33** (1960) 1338.

14. F. Haake, in *Springer Tracts in Modern Physics*, vol. 66, p. 98 (Springer, Berlin 1973).

15. T. Arimitsu, *J. Phys. Soc. Japan* **51** (1982) 1720.

16. L. van Hove, *Physica* **23** (1957) 441.

17. R. Kubo, *J. Phys. Soc. Japan* **26** Suppl. (1969) 1.

18. R. Kubo, *J. Phys. Soc. Japan* **12** (1957) 570.

19. P. C. Martin and J. Schwinger, *Phys. Rev.* **115** (1959) 1342.

20. T. Arimitsu, Y. Takahashi and F. Shibata, *Physica* **A100** (1980) 507.

21. T. Arimitsu, *Physica* **A104** (1980) 126.

22. T. Arimitsu, *J. Phys. Soc. Japan* **51** (1982) 1054.

23. M. Ban and T. Arimitsu, *Physica* **A129** (1985) 455.

24. T. Tominaga, M. Ban and T. Arimitsu, *Physica* **A149** (1988) 26.

25. T. Tominaga, T. Arimitsu, J. Pradko and H. Umezawa, *Physica* **150** (1988) 97.

26. R. L. Hudson and K. R. Parthasarathy, *Commun. Math. Phys.* **93** (1984) 301.

27. K. R. Parthasarathy, *Rev. Math. Phys.* **1** (1989) 89.

28. C. W. Gardiner and M. J. Collett, *Phys. Rev. A* **31**, (1985) 3761.

29. T. Arimitsu and H. Umezawa, *Prog. Theor. Phys.* **74** (1985) 429.

30. T. Arimitsu and H. Umezawa, *Prog. Theor. Phys.* **77** (1987) 32.

31. T. Arimitsu, *Thermal Field Theories*, eds. H. Ezawa, T. Arimitsu and Y. Hashimoto (North-Holland, 1991) p. 207.

32. T. Arimitsu, *Phys. Lett.* **A153** (1991) 163.

33. F. Shibata and T. Arimitsu, *J. Phys. Soc. Japan.* **49** (1980) 891.

34. T. Arimitsu and H. Umezawa, *Prog. Theor. Phys.* **77** (1987) 53.

35. T. Arimitsu, M. Guida and H. Umezawa, *Europhys. Lett.* **3** (1987) 277.

36. T. Arimitsu, M. Guida and H. Umezawa, *Physica* **A148** (1988) 1.

37. T. Arimitsu and H. Umezawa, *J. Phys. Soc. Japan* **55** (1986) 1475.

38. T. Arimitsu, H. Umezawa and Y. Yamanaka, *J. Math. Phys.* **28** (1987) 2741.

39. T. Arimitsu, J. Pradko and H. Umezawa, *Physica* **A135** (1986) 487.

40. J. Schwinger, *J. Math. Phys.* **2** (1961) 407.

41. L. V. Keldysh, *Sov. Phys. JETP* **20** (1965) 1018.

42. K. Chou, Z. Su, B. Hao and L. Yu, *Phys. Rep.* **118** (1985) 1.

43. T. Arimitsu, *Physica* **A148** (1988) 427.

44. H. Umezawa and T. Arimitsu, *Prog. Theor. Phys. Supplement* **86** (1986) 243.

45. T. Arimitsu, Y. Sudo and H. Umezawa, *Physica* **146A** (1987) 433.

46. T. Arimitsu, *J. Phys. A: Math. Gen.* **24** (1991) L1415.

47. M. Ban and T. Arimitsu, *Physica* **146A** (1987) 89.

48. T. Iwasaki, T. Arimitsu and F. H. Willeboordse, *Thermal Field Theories*, eds. H. Ezawa, T. Arimitsu and Y. Hashimoto (North-Holland, 1991) p. 459.

49. T. Arimitsu, F. H. Willeboordse and T. Iwasaki, *Physica A* **182** (1991) 214.

50. T. Arimitsu and N. Arimitsu, (1992) preprint.

51. T. Saito and T. Arimitsu, (1992) submitted.

52. T. Arimitsu, M. Ban and T. Saito, *Physica* **A177** (1991) 329.

53. T. Arimitsu, M. Ban and T. Saito, (1991) submitted.